

Lattice points and Dirichlet series

Doctoral Thesis**Author(s):**

Diehl, Christina

Publication date:

2011

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-007316204>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Diss. ETH N° 20016

LATTICE POINTS AND DIRICHLET SERIES

A dissertation submitted to

ETH ZURICH

for the degree of

Doctor of Sciences

presented by

CHRISTINA DIEHL

Dipl. math., Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i.Br.

born February 12, 1978

Citizen of Germany

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Özlem İmamoğlu, examiner

Prof. Dr. Emmanuel Kowalski, co-examiner

Prof. Dr. Árpád Tóth, co-examiner

2011

Abstract

In 2004, Duke and İmamoğlu studied a Dirichlet series associated to counting lattice points in certain right elliptical cones, generalizing a result and method by Hecke. Their main result was that this series has a meromorphic continuation to the whole complex plane. They also gave the location of possible poles. For the proof they generalized their Dirichlet series to a series in two variables which was automorphic in the new variable with respect to some cofinite subgroup Γ of $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Duke and İmamoğlu gave their result in the case that $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ is compact. The object of this thesis was to generalize their result also to the non-compact case. The main result was proved for the most important non-compact case, $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Under an extra assumption the meromorphic continuation of the respective Dirichlet series to the whole complex plane as well as the location of possible poles was given.

The main tools for the proof of this result were spectral analysis and methods from analytic number theory. Following the method used by Duke and İmamoğlu, the Dirichlet series under consideration was generalized to a two-variable series, this series then expanded by means of the spectral theorem and the spectral coefficients computed. They could be represented by an infinite integral whose integrand was a product of a special zeta-function with an Eisenstein series and Gamma factors. Using the analytic properties of these functions the meromorphic continuation of the integral was proved.

Zusammenfassung

2004 untersuchten Duke und İmamoğlu eine Dirichletreihe, die mit dem Gitterpunktproblem für gewisse elliptische Kegel zusammenhing, wobei sie ein Ergebnis und eine Methode von Hecke verallgemeinerten. Sie bewiesen, dass diese Reihe meromorph in die gesamte komplexe Ebene fortgesetzt werden kann, und gaben die mögliche Lage von Polen an. Für den Beweis verallgemeinerten sie ihre Dirichletreihe zu einer Reihe in zwei Variablen, die in der neuen Variable automorph war bezüglich einer Fuchsschen Untergruppe erster Art Γ von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Duke und İmamoğlu bewiesen ihr Theorem für den Fall, dass $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ kompakt ist. Das Ziel dieser Dissertation war es, ihr Ergebnis auch auf den nichtkompakten Fall zu verallgemeinern. Der Hauptsatz wurde für den wichtigsten nichtkompakten Fall gezeigt, d.h. $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Unter Annahme einer zusätzlichen Vermutung wurde die meromorphe Fortsetzung der entsprechenden Dirichletreihe auf die gesamte komplexe Ebene gezeigt sowie die Lage von möglichen Polen angegeben.

Für den Beweis wurden hauptsächlich Methoden der Spektralanalyse und der analytischen Zahlentheorie benutzt. Dem Beweis von Duke und İmamoğlu folgend wurde die entsprechende Dirichletreihe zu einer Reihe in zwei Variablen verallgemeinert, diese Reihe dann mit dem Spektralsatz entwickelt und die Spektralkoeffizienten berechnet. Diese bestanden aus einem unendlichen Integral, dessen Integrand das Produkt einer speziellen Zetafunktion, einer Eisensteinreihe und Gammafaktoren war. Aus den analytischen Eigenschaften dieser Funktionen folgte die meromorphe Fortsetzbarkeit des Integrals.